## **Лекция 5. Информационно-логические основы вычислительной техники (продолжение)**

## **4.5. Законы и правила упрощения логических функций**

### 4.5.1. Соотношения, законы и правила алгебры логики

В алгебре логики имеют место следующие соотношения и действуют следующие законы (слайд 2).

***Соотношения***

****

***Законы отрицания (инверсии)***

а) отрицание конъюнкции

****

 Отрицание от конъюнкции равно дизъюнкции отрицаний.

б) отрицание дизъюнкции

****

 Отрицание от дизъюнкции равно конъюнкции отрицаний.

***Переместительный закон***

Логические функции И и ИЛИ подчиняются переместительному закону:



****

***Сочетательный закон***

Логические функции И и ИЛИ подчиняются сочетательному закону:





***Дистрибутивный (распределительный) закон***

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операции логического сложения и логического умножения подчиняются дистрибутивному (распределительному) закону: одинаковые переменные в конъюнкциях и дизъюнкциях можно выносить за скобку (слайд 3).

а)дистрибутивный закон умножения по отношению к сложению имеет такой же вид, как и для алгебраического сложения и умножения, например:

 (распределение конъюнкции по дизъюнкции);

б)дистрибутивный закон сложения по отношению к умножению является специфичным для алгебры логики и не имеет аналогов в обычной алгебре:

 (распределение дизъюнкции по конъюнкции).

Непосредственно из дистрибутивного закона вытекают следующие правила, которые используются при преобразовании функций, при их *минимизации*, т.е. приведении их к виду с *наименьшим числом конъюнкций минимально возможного ранга*, после которого функция не поддается дальнейшему упрощению.

Из первой формы дистрибутивного закона вытекают следующие правила (слайд 4):

***Правило склеивания для ДНФ***

а) (для 2 переменных)

.

б) (для 3 переменных)

****

Это правило позволяет заменить два члена, имеющие общую часть и аргумент с инверсией в одном члене и без инверсии в другом члене, одним общим членом, т.е. произвести склеивание.

***Правило поглощения для ДНФ***

а) (для 2 переменных)

XVXY = X.

б) (для 3 переменных)

XVX Λ YVX Λ Y Λ Z = X.

Это правило позволяет заменить 2 или больше члена, один из которых входит в другой (конъюнкция) в качестве сомножителя, одним этим членом, т.е. произвести “поглощение” члена конъюнкции общим членом.

Из второй формы дистрибутивного закона вытекает правило свертки (слайд 5).

***Правило свертки для ДНФ***

a)****

или

b)

Это правило позволяет упростить один из членов дизъюнктивной нормальной формы.

Аналогичные формулы существуют для преобразования конъюнктивных нормальных форм (слайд 5).

***Правило склеивания для КНФ***



***Правило поглощения для КНФ***



***Правило свертки для КНФ***

****

**Пример 1**. Пусть логическая функция задана аналитически:



Требуется упростить функцию (получить ее минимальную форму) (слайды 6-7).

* Преобразуем член с инверсией:



* Раскроем скобки:

****

(конъюнкция )

* Преобразуем член с конъюнкцией:

** {**раскрываем скобки**} =**



* Подставляем преобразованные выражения в исходную формулу:



Это нормальная дизъюнктивная форма. Применяя к ней правила склеивания и поглощения, можно ее упростить:

* к 1-му и 2-му членам применим правило склеивания:



* к 3-му и 5-му членам применим правило поглощения:



Получим:



Результат **** не подлежит дальнейшему преобразованию (упрощению). Следовательно, минимальная форма исходной функции:

****

### 4.5.2. Правила упрощения логических функций

Пусть дана некоторая логическая функция либо в аналитическом виде, либо в виде таблицы, в которой перечислены значения функции при всех возможных наборах аргументов (слайды 8-10).

Требуется определить вид простейшей формулы, выражающей заданную функцию, которая содержит минимальное количество элементарных логических функций И, ИЛИ, НЕ.

Эта простейшая формула может иметь

а) либо нормальную дизъюнктивную форму;

б) либо нормальную конъюнктивную форму;

в) либо какой-нибудь еще тип.

Нахождение такой простейшей формулы, выражающей заданную функцию, удобно выполнять в несколько этапов.

На первом этапе логическая функция представляется в СДНФ или в СКНФ.

Если количество наборов аргументов, при которых функция равна 1, меньше количества наборов, при которых она равна 0, то наиболее простой окажется СДНФ, в противном случае - СКНФ.

Если исходная функция задана аналитически, то преобразование ее в СДНФ или СКНФ выполняется в такой последовательности:

1) Путем последовательного применения законов инверсии, логическая функция приводится к нормальной форме, в которой инверсия применяется только к аргументам, но не к функциям от них.

2) Путем раскрытия скобок (по известным формулам) логическая функция приводится к дизъюнктивной нормальной или конъюнктивной нормальной форме (где ДНФ- дизъюнкция ряда членов, которые есть конъюнкция аргументов, взятых с инверсией или без нее; а КНФ- конъюнкция ряда членов, которые есть дизъюнкция аргументов, взятых с инверсией или без нее.)

3) Если это ДНФ, и каждый член представляет собой конъюнкцию менее **n** членов, (**n** - количество аргументов функции), то каждый такой член умножается на выражение , тождественно равное 1 (Х - один из аргументов, которые в данной дизъюнкции отсутствуют). В результате чего конъюнкция превращается в дизъюнкцию двух конъюнкций (расширение ДНФ):



Если же это КНФ, то к каждому члену, представляющему собой дизъюнкцию менее **n** членов (**n** - количество аргументов), добавляется член тождественно равный 0 (Х - аргумент, отсутствующий в данной дизъюнкции). В результате чего каждый из этих членов превращается в конъюнкцию двух дизъюнкций (расширение КНФ):



4) Приводятся подобные члены.

Далее п.п. 3-4 повторяются до тех пор, пока функция не будет представлена в СДНФ или СКНФ, т.е. количество членов в каждой конъюнкции (дизъюнкции) не станет равным **n** и не станет совпадающих дизъюнкций (конъюнкций).

На втором этапе происходит преобразование (минимизация) полученной логической функции по известным правилам, приведенным выше.

### 4.5.3. Упрощение логической функции, заданной таблично

**Пример 2**.Пусть логические функции 3 аргументов F1и F2 заданы таблично (на наборах):

F1 = 0 на наборах: (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0)

F2 = 1 на наборах: (0,0,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1)

Необходимо получить их минимальную форму записи (слайды 11-12).

Представим функцию F1 в СКНФ, а функцию F2 в СДНФ и проведем необходимые преобразования.



Исходя из основных соотношений алгебры логики, запишем дизъюнкцию во 2-й скобке два раза и представим функцию F1 в виде:



Применим правило склеивания для 1-ой и 2-ой и для 3-ей и 4-ой скобок:

****

Воспользовавшись второй формой дистрибутивного закона, получим окончательный вид функции F1**:**

****

Проведем аналогичные преобразования над функцией F2.



Минимальные формы записи функций:

;



### 4.5.4. Определение тождественности логических функций

**Пример 3**.Получить путем тождественных преобразований минимальную форму записи логической функции F1 и проверить, является ли она тождественной функции F2 (слайд 13).



Упростим функцию F1. Так как функция F1 задана аналитически, то будем производить упрощение по шагам:

 1-й шаг



2-й шаг



3-й шаг

****

(по правилу склеивания для **КНФ**).

**** (полученный результат).

 (исходная функция).

Таким образом, функция F1 тождественно равна функции F2, так как совпадают их минимальные формы.

**Пример 4**.Получить путем тождественных преобразований логической функции F1 ее минимальную форму записи и проверить, является ли она тождественной функции F2, определенной на данных наборах (слайд 14).



F2=1 на наборах 4, 5, 6.

1. Функция F2 определена таблично, запишем ее в СДНФ:



**2)** Упрощаем функцию F1:

⎯⎯ \_\_ \_\_ \_\_ \_\_

X2X3+X1X3 = X2+X3+X1Х3 = Х2+Х3+Х1 – вторая скобка.

Тогда



Таким образом, логическая функция F1, заданная аналитически, тождественна функции F2, заданной таблично.

**Пример 5**.Получить путем тождественных преобразований логической функции F1 ее минимальную форму записи и проверить, является ли она тождественной функции F2, определенной на данных наборах (слайды 15-16).

F1=0 на наборах: 0, 2, 3, 4, 6, 7



Так как F1=0 на 0, 2, 3, 4, 6, 7, то F1=1 на 1, 5 (см. таблицу истинности F1):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | F1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Следовательно, нужно представить F1в **СДНФ**



Преобразуем F2**:**



Используя основные соотношения алгебры логики (А∧А=А), можно представить функцию F2в виде:



Применяя вторую форму распределительного закона ко 2-ой и 4-ой скобкам и к 3-ей и 5-ой скобкам, получим следующее:



Применив вторую форму распределительного закона к 1-ой и 3-ей скобке, получим:



Таким образом, функции F1 и F2 тождественны.

***Примечание:***

Логические функции тождественны, если совпадают их минимальные формы. Если минимальные формы не совпадают, то необходимо обе функции привести к любой совершенной форме (**СДНФ** или **СКНФ**), используя правила расширения, и сравнить совершенные формы. Если они совпадают, то функции тождественны.

**4.5.5. Построение таблиц истинности**

**Пример 6**.Получить таблицу истинности функции F2,заданной аналитически:  (слайды 17-18).

Для построения таблиц истинности необходимо представить функцию в совершенной форме (**СДНФ** или **СКНФ**).

Приведем функцию F2 к совершенной дизъюнктивной форме:

1. Упростим вторую скобку



2)   

Применим правило расширения, чтобы получить **СДНФ**. Умножим X1X2 на  и получим:



Эта функция является **СДНФ** и принимает значение 1 на наборах:

000 - 0 ⎞

111 – 7 ⎬ = 1, и 0 на остальных наборах 0.

110 – 6 ⎠

Тогда таблица истинности будет выглядеть следующим образом:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | F2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |